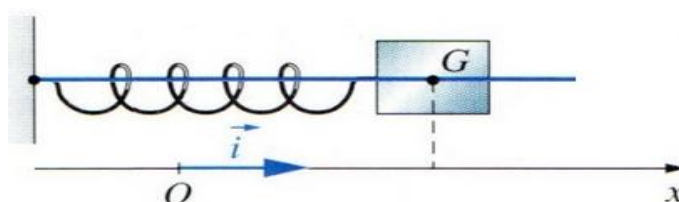


### Mécanique Forcé - Analogie avec Electricité forcée

#### Exercice N° - 1 -

Un oscillateur mécanique, formé d'un solide **S** de masse **m = 40 g** accroché à l'extrémité d'un ressort horizontal de raideur **K**, est excité par une force sinusoïdale  $\vec{F} = F_m \cdot \sin(\omega_e t + \varphi_e) \vec{i}$  de pulsation  $\omega_e$  variable et d'amplitude constante  $F_m = 3 \text{ N}$ .



Au cours de son mouvement, le solide **S** subit l'action d'une force de frottement  $\vec{f} = -h \cdot \vec{v}$  tel que **h** est une constante positive et  $\vec{v}$  la vitesse du solide **S**. la position **G<sub>0</sub>** lorsque **S** est en équilibre coïncide avec l'origine **O** du repère **(O, i)**.

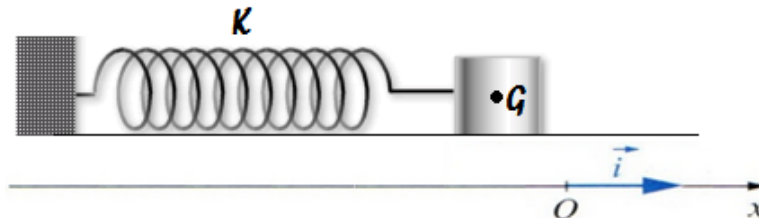
- 1) Sachant que **S** effectue des oscillations forcées d'élongations  $x(t) = X_m \cdot \sin(\omega_e t)$  et de vitesse  $v(t) = V_m \cdot \sin(\omega_e t + \varphi_v)$ 
  - a- Etablir l'équation différentielle reliant **x** à ses dérivées première et seconde.
  - b- Quelle est l'expression de la pulsation propre  $\omega_0$  de cet oscillateur ?
  - c- En exploitant la construction vectorielle de Fresnel correspondante à l'équation différentielle dans le cas où  $\omega_e < \omega_0$ , déterminer les expressions littérales donnant  $X_m$  et  $\text{tg}(\varphi_e - \varphi_x)$  en fonction de **K, F<sub>m</sub>, h, m** et  $\omega_e$ .
- 2) On fait varier la pulsation  $\omega_e$  de la force excitatrice et on suit simultanément les variations de  $X_m$  et de  $V_m$ , on constate que pour  $\omega_{e1} = 42,4 \text{ rd.s}^{-1}$  on a résonance d'amplitude et pour  $\omega_{e2} = 50 \text{ rd.s}^{-1}$  on a résonance de vitesse.
  - a- Montrer qu'à la résonance d'amplitude  $\omega_e^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}$ .
  - b- Calculer les valeurs de **K, h,  $\varphi_e$ , et  $V_m$** . En déduire celle de  $X_m$ .
  - c- Ecrire l'expression de  $x(t)$ . En déduire celle de  $v(t)$ .
  - d- Faire la construction de Fresnel correspondante.
- 3)
  - a- Donner l'expression de  $\text{tg}(\varphi_e - \varphi_v)$  en fonction de **m, K** et **h**.
  - b- Montrer que si  $(\varphi_e - \varphi_v) = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$ ,  $\omega_e$  vérifie la relation  $m\omega_e^2 + h\omega_e - K = 0$ .
  - c- En déduire la ou les valeurs de  $\omega_e$ , qui réalise (réalisent) ce déphasage.

## Exercice N° - 2 -

### I-

Un oscillateur mécanique comporte un solide **S** de masse  $m = 10 \text{ g}$  et un ressort de masse négligeable et de raideur **K**. le solide **S** est soumis à une force de frottement de type visqueux  $\vec{f} = -h \cdot \vec{v}$  ou  $h$  est une constante positive et  $\vec{v}$  la vitesse du solide **S**.

On écarte le solide **S** de sa position d'équilibre d'une distance  $x_0$  et on le libère sans vitesse initiale.



1) Montrer que l'équation différentielle vérifiée par l'élongation  $x(t)$  du centre d'inertie **G** du solide est :  $m \frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + Kx = 0$ .

2)

a- Ecrire l'expression de son énergie mécanique à un instant  $t$  quelconque.

b- Montrer que cette énergie diminue au cours du temps.

### II-

Le solide **S** est maintenant soumis à une force excitatrice  $\vec{F} = F_m \cdot \sin(\omega_e t + \varphi_e) \vec{i}$ , l'équation différentielle vérifiée par l'élongation devient alors :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + Kx = F(t)$$

La solution de cette équation est  $x(t) = X_m \cdot \sin(\omega_e t + \varphi_e)$  avec  $X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 \omega_e^2 + (K - m\omega_e^2)^2}}$

1)

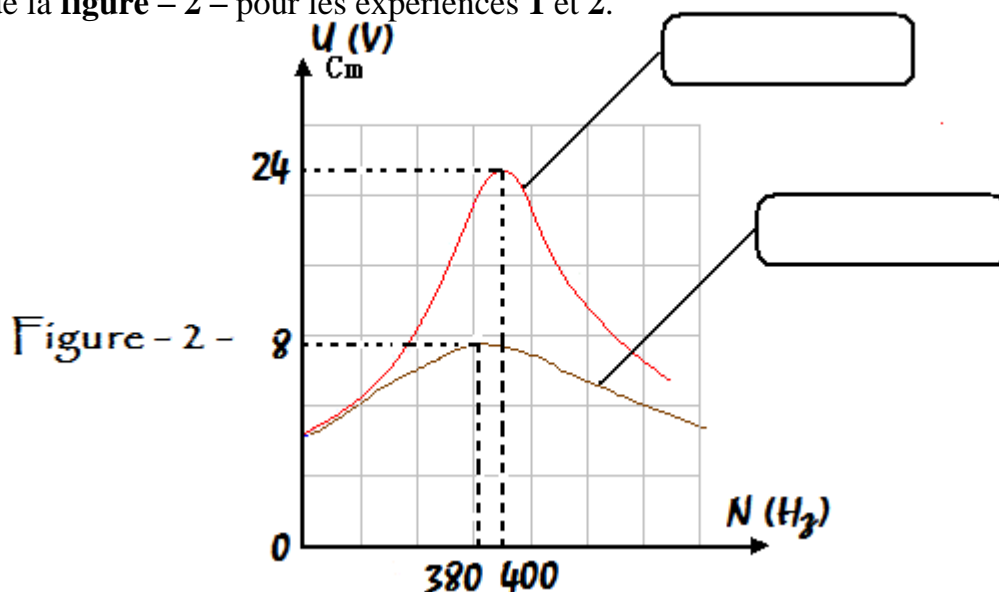
a- Donner le circuit électrique analogue à cet oscillateur mécanique.

b- Ecrire, par analogie avec la mécanique, l'équation différentielle mettant en jeu la charge  $q$  du condensateur du circuit électrique précédent.

c- Justifier, pourquoi on qualifie les oscillations électriques de la charge  $q(t)$  du condensateur de « **forcées** ».

d- Ecrire par analogie l'expression de la charge maximale du condensateur.

2) L'étude d'un dipôle **R****L****C** en régime sinusoïdal d'oscillations forcées, permet de tracer les graphes de la **figure - 2** - pour les expériences 1 et 2.



a- Indiquer, en le justifiant, si la tension maximale  $U_{Cmax}$  aux bornes du condensateur atteint sa valeur la plus grande possible à la résonance de charge ou à la résonance d'intensité ?

b- Compléter la légende grisée de la **figure -2-** par l'une des expressions de la liste suivantes :

Résonance d'élongation – résonance floue – résonance d'intensité – résonance aigue –  
réponse linéaire – résonance de charge.

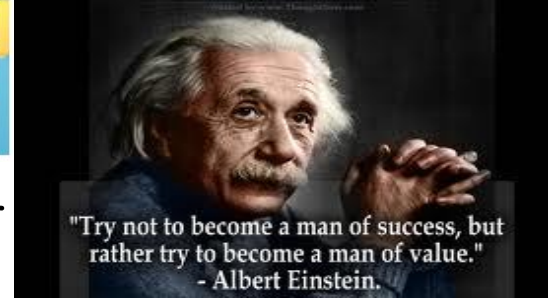
c- Marquer la position approximative de la fréquence propre  $N_0$  de l'oscillateur sur l'axe des abscisses de la **figure – 2 -**.

d- Pour passer de **l'expérience 1** à **l'expérience 2**, quel composant faut – il modifier sa valeur ? Faut – il augmenter ou diminuer cette valeur ?

e- La puissance électrique moyenne consommée par le dipôle **RLC** lorsque **N = 400 Hz** est **P = 80 mW**.

→ Calculer la valeur de la résistance **R**. la capacité du condensateur étant **C = 1 μF**.

On rappelle qu'en régime sinusoïdal forcé, la puissance moyenne d'un pendule élastique est donnée par la relation  $P = \frac{1}{2} h V_m^2$  ou  $V_m$  est l'amplitude de la vitesse du centre d'inertie du solide.



### Exercice N°- 1-

I-

1) a- Les forces extérieures exercées sur le solide S sont :

- $\vec{P}$  poids du solide
- $\vec{R}$  la réaction du plan
- $\vec{T}$  la réaction du plan horizontal (bac à coussin d'air).
- $\vec{f}$  la force de frottement visqueux.
- $\vec{F}$  force excitatrice.

La R.F.D s'écrit :  $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \leftrightarrow \vec{P} + \vec{T} + \vec{R} + \vec{f} + \vec{F} = m\vec{a}$

Projection sur l'axe du mouvement ( $x'ox$ ), on aura :  $-kx - hv + F = ma \leftrightarrow ma + hv + kx = F$

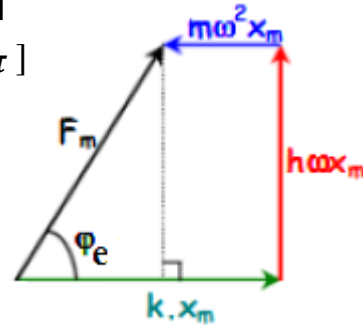
Avec :  $\begin{cases} a = \frac{dv}{dt} \\ v = \frac{dx}{dt} \end{cases} \leftrightarrow a = \frac{d^2x}{dt^2}$  d'où l'équation différentielle est :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = F_m \cdot \sin(\omega_e t + \varphi_e)$$

L'expression de la pulsation propre  $\omega_0$  de cet oscillateur est  $\omega_e = \sqrt{\frac{k}{m}}$

b- Les vecteurs de Fresnel sont :

$$\begin{aligned} kx &= kX_m \sin(\omega_e t) && \rightarrow \vec{v}_1 [kX_m, 0] \\ h \frac{dx}{dt} &= h\omega_e X_m \sin\left(\omega_e t + \frac{\pi}{2}\right) && \rightarrow \vec{v}_2 \left[h\omega_e X_m, +\frac{\pi}{2}\right] \\ m \frac{d^2x}{dt^2} &= m\omega_e^2 X_m \sin(\omega_e t + \pi) && \rightarrow \vec{v}_3 [m\omega_e^2 X_m, +\pi] \\ F &= F_m \cdot \sin(\omega_e t + \varphi_e) && \rightarrow \vec{v} [F_m, \varphi_e] \end{aligned}$$



Construction de Fresnel dans le cas où :  $\omega_e < \omega_0$

On a  $\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_x = \varphi_e > 0$

$F$  est toujours en avance de phase par rapport à  $x$ .

En utilisant le théorème de Pythagore, on obtient :

$$X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2\omega_e^2 + (k-m\omega_e^2)^2}} \text{ Et } \text{tg}(\Delta\varphi) = \text{tg}(\varphi_e - \varphi_x) = \text{tg}(\varphi_e) = \frac{h\omega_e}{k-m\omega_e^2}$$

2)

a- A la résonance de vitesse, on a  $\omega_{e2} = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  alors  $k = m\omega_{e2}^2$  soit  $k = 100 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$

A la résonance d'amplitude  $\omega_{e1}^2 = \omega_{e2}^2 - \frac{h^2}{2m^2}$  soit  $h = m \cdot \sqrt{2(\omega_{e2}^2 - \omega_{e1}^2)}$  d'où  $h = 1,5 \text{ Kg} \cdot \text{s}^{-1}$

$$\text{tg}(\varphi_e) = \frac{h\omega_e}{k-m\omega_e^2} = 2,26 \text{ Soit } \varphi_e = 1,15 \text{ rd}$$

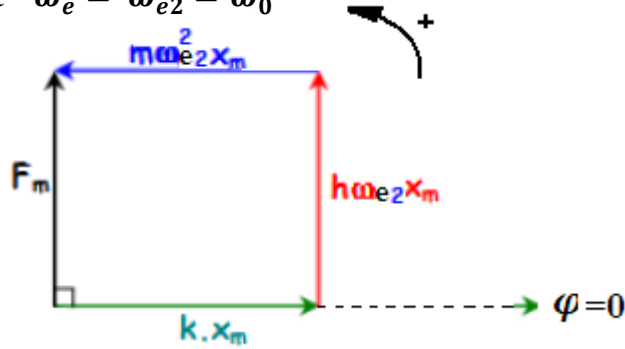
$$V_{om} = \frac{F_m}{h} \text{ Donc } V_{om} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

A la résonance de vitesse  $\omega_e = \omega_{e2}$  et  $V_{om} = \omega_{e2} X_m$  alors  $X_m = \frac{\omega_{e2}}{V_{om}}$  soit  $X_m = 0,04 \text{ m}$

b-  $x(t) = X_m \sin(\omega_{e2}t + \varphi_x) = X_m \sin(\omega_{e2}t) = 0,04 \sin(50t)$

$v(t) = V_{0m} \sin\left(\omega_{e2}t + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin\left(50t + \frac{\pi}{2}\right)$

c- Construction de Fresnel quant  $\omega_e = \omega_{e2} = \omega_0$



3)

a-  $\text{tg}(\varphi_e - \varphi_v) = \frac{m\omega_e - \frac{k}{m}}{h}$

b-  $\frac{m\omega_e - \frac{k}{m}}{h} = \text{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$  soit  $m\omega_e^2 + h\omega_e - k = 0$

c- Pour déterminer la valeur de  $\omega_e$  qui réalise le déphasage  $\varphi_e - \varphi_v = -\frac{\pi}{4}$  rad, on résout l'équation  $0,04\omega_e^2 + 1,5\omega_e - 100 = 0$  on trouve  $\omega_e = 34,65 \text{ rad.s}^{-1}$

### Exercice N°- 2-

I-

1) Les forces appliquées au système formé par le solide de masse  $m$ , dans le référentiel terrestre sont :

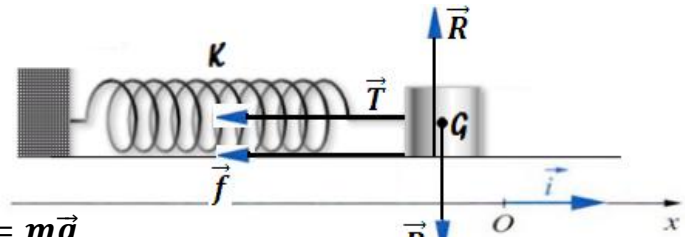
- $\vec{P}$  poids du solide
- $\vec{R}$  la réaction du plan
- $\vec{T}$  la réaction du plan horizontal (bac à coussin d'air).
- $\vec{f}$  la force de frottement visqueux.

Pour  $x > 0$  et  $v > 0$  on a la représentation suivante :

La R.F.D s'écrit :  $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{T} + \vec{R} + \vec{f} = m\vec{a}$

Projection sur l'axe du mouvement ( $x'ox$ ), on aura :  $-kx - hv = ma \Leftrightarrow ma + hv + kx = 0$

Avec :  $\begin{cases} a = \frac{dv}{dt} \\ v = \frac{dx}{dt} \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{d^2x}{dt^2}$  d'où l'équation différentielle est :  $m \frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = 0$



2)

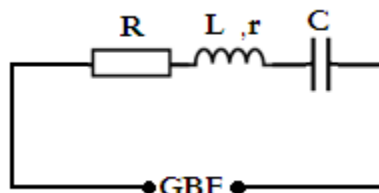
a- L'expression de l'énergie mécanique du système {solide, ressort} à un instant  $t$  quelconque est donnée par :  $E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$

b- En dérivant l'expression de  $E$  par rapport au temps :  $\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2\right) = mv \frac{dv}{dt} + kx \frac{dx}{dt}$   
 $\Leftrightarrow \frac{dE}{dt} = v\left(m \frac{d^2x}{dt^2} + kx\right) = v \times (-hv) \Leftrightarrow \frac{dE}{dt} = -hv^2 < 0$  D'où l'énergie mécanique du système diminue au cours du temps.

II-

1)

a- Le circuit électrique analogue à cet oscillateur mécanique forcé est :



b- Par analogie, l'équation différentielle mettant en jeu la charge  $q$  du condensateur du circuit électrique est :  $L \frac{d^2q}{dt^2} + R_T \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = u(t)$

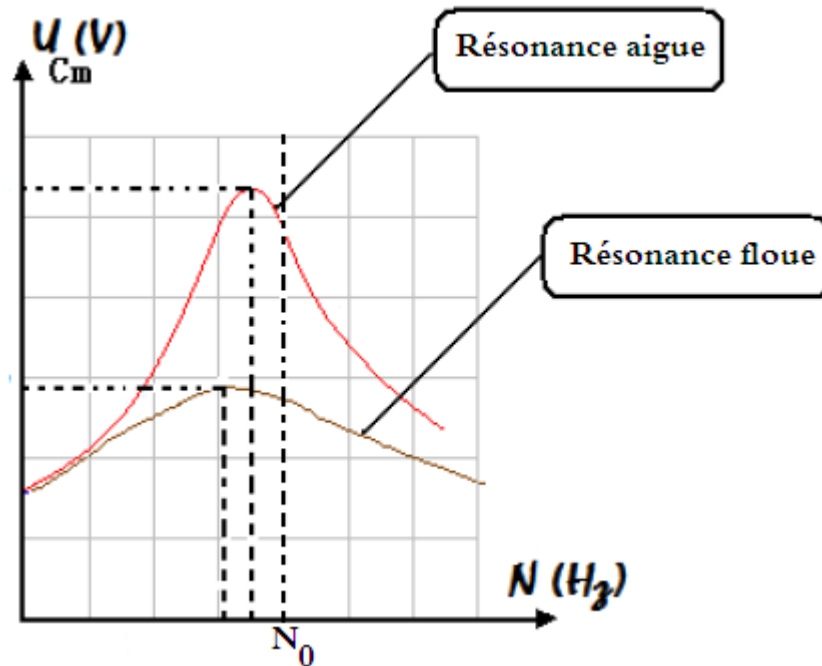
c- Les oscillations électriques de la charge  $q(t)$  du condensateur sont qualifiées de « forcées » car  $q(t)$  oscille à la pulsation imposée par l'excitateur (GBF).

d- Par analogie l'expression de la charge maximale du condensateur est :  $Q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R_T^2 \omega_e^2 + (\frac{1}{C} - L\omega_e^2)^2}}$

2)

a- A la résonance de charge, l'amplitude de la charge est maximale  $q = Q_{max}$  or  $Q_{max} = C \cdot U_{Cmax}$  d'où la tension maximale  $U_{Cmax}$  atteint sa valeur la plus grande possible à la résonance de charge.

b-



c- La fréquence de résonance de charge est toujours inférieure à la fréquence propre  $N_0$  de l'oscillateur.

d- Pour passer de l'expérience – 1 – à l'expérience – 2-, il faut modifier la valeur de la résistance  $R$ .

e- La puissance électrique moyenne est :  $P = \frac{1}{2} R I_m^2 = \frac{1}{2} R (2\pi N Q_m)^2 = \frac{1}{2} R (2\pi N C U_{Cm})^2$

Soit  $R = \frac{2P}{(2\pi N C U_{Cm})^2} = 44 \Omega$ .